MATHÉMATIQUES 3 ---------- Filière PC ----------

PROBLEME

K désigne R ou C . Si $(u_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de K , on note,

si $n_0 \in N$, $\forall n \geq n_0$, $P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$.

Si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ converge, on notera $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ sa limite et on dira que le produit $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ existe.

I Dans cette partie K=R .

1°) On suppose que, $\forall n \in N$, $0 < u_n < 1$. Montrer que le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

2°) Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

3°) a) Vérifier que, $\forall t \in R^*$, $\frac{th\, t}{th\, \frac{t}{2}} = 1+\frac{1}{ch\, t}$.

b) Soit $x \in R$, $x > 1$ et $(v_n)_{n\in N^*}$ la suite définie par :

$v_1 = x$ et, $\forall n \geq 1$, $v_{n+1} = 2v_n^2 - 1$.

Montrer l'existence et donner la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{v_n}\right)$.

4°) a) On suppose que $\forall n \in N$, $|u_n| < 1$ et que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer l'existence de $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ soit non nul.

b) Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

II 1°) Soit $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathrm{R}$; φ est continue ; $\varphi(\frac{\pi}{2}) \neq 0$; $n \in \mathrm{N}$.

Montrer que, quand $n \to +\infty$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin^{2n} t \, dt \sim \varphi(\frac{\pi}{2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt$.

2°) $n \in \mathrm{N}$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt$ et en donner un équivalent quand $n \to +\infty$.

3°) a) Montrer que, $\forall n \in \mathrm{N}$, l'application $t \to e^{-2t} \sin^{2n} t$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) $n \in \mathrm{N}$ et $u_n = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sin^{2n} t \, dt$; déduire des questions précédentes que,

quand $n \to +\infty$, $u_n \sim \frac{1}{2sh\pi} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

c) Calculer u_n en fonction de n .

d) Montrer que $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ existe et donner sa valeur.

III Dans cette partie K=C .

1°) Montrer que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left|1 + \frac{i}{n}\right|$ existe et donner sa valeur.

2°) $n \in N^*$, on considère n nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$. Comparer

$\left| \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k) - 1 \right|$ et $\prod_{k=1}^{n} (1 + |z_k|) - 1$.

3°) Montrer que, si $\forall n \in \mathrm{N}$, $|u_n| < 1$ et si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n)$ existe. On pourra utiliser le critère de Cauchy.

4°) On suppose que, $\forall n \in \mathrm{N}$, $|u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$. On pose :

$$\forall n \in N \ , \ u_n = e^{i\theta_n} \ , \ -\pi < \theta_n < \pi \ .$$

Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe si et seulement si la série $\sum \theta_n$ converge.

5°) Le produit $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)$ existe-t-il ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail